第 9 講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　不定方程式（2 元 1 次）

1　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=25$

(2)　$24x+19y=7$

Point Pickup

1 次不定方程式 $ax+by=c$（a，b は互いに素）の整数解は

$a\times(x$ の式$)=b\times(y$ の式$)$ ……①

と変形し，$(x$ の式$)=b$ の倍数　とすることで求めることができる。

①の式に変形する方法の 1 つとして，方程式を満たす 1 組の解(特殊解)を見つけ，その解を方程式に代入した式と，もとの方程式との差をとる方法がある。

特殊解を見つけることが困難な場合は，ユークリッドの互除法を用いる方法がある。

第9講　PART1　確認問題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

1　$3x-4y=21$

k を整数とすると，整数解は

$x=$ [ア] $k+$ [イ]，　$y=$ [ウ] k

2　$37x+32y=4$

k を整数とすると，整数解は

$x=$ [エオ] $k+$ [カキ]，

$y=$ [クケコ] $k-$ [サシ]

ただし，[カキ] は30以上60以下の値とする。

第 9 講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　不定方程式（2 元 1 次）

1　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=25$

(2)　$24x+19y=7$

(1)　$5x-2y=25$ より　$5(x-5)=2y$ …… ①

2 と 5 は互いに素であるから，$x-5$ は 2 の倍数である。

よって，$x-5=2k$（k は整数）と表される。

このとき，①より　$5\cdot 2k=2y$　$y=5k$

したがって，求める整数解は　$x=2k+5$，$y=5k$（k は整数）

(2)　$24x+19y=7$ …… ①

24 と 19 に互除法を用いると

$24=19\cdot 1+5$ より $5=24-19\cdot 1$

$19=5\cdot 3+4$ より $4=19-5\cdot 3$

$5=4\cdot 1+1$ より $1=5-4\cdot 1$

これより

$$
\begin{aligned}
1&=5-4\cdot 1\\
&=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1\\
&=5\cdot 4+19\cdot(-1)\\
&=(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot(-1)\\
&=24\cdot 4+19\cdot(-5)
\end{aligned}
$$

よって　$24\cdot 4+19\cdot(-5)=1$

この式の両辺を 7 倍して　$24\cdot 28+19\cdot(-35)=7$ …… ②

①－②より　$24(x-28)+19(y+35)=0$　つまり　$24(x-28)=-19(y+35)$ …… ③

24 と 19 は互いに素であるから $x-28$ は 19 の倍数である。

よって，$x-28=19k$ (k は整数) と表される。

このとき，③より　$24\cdot 19k=-19(y+35)$　$24k=-(y+35)$

したがって，求める整数解は　$x=19k+28$，$y=-24k-35$（k は整数）

第 9 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：7，ウ：3

[解説]

$3x-4y=21$ より

$$3(x-7)=4y \quad \cdots\cdots ①$$ [A]

3 と 4 は互いに素であるから，$x-7$ は 4 の倍数である。

よって，$x-7=4k$ (k は整数)と表される。

このとき，①より　$3\cdot 4k=4y$

ゆえに　$y=3k$

したがって，求める整数解は

$$\boldsymbol{x=4k+7,\ y=3k}\ (k \text{ は整数})$$

[A]　1 次不定方程式 $ax+by=c$（a，b は互いに素）は，

$$a(x-p)=b(y-q)$$

と変形する（p，q は整数）。
この形にできれば，

$$x-p=(b \text{ の倍数})$$

より，整数解を求めることができる。

2 **[正解]** エオ：32，カキ：52，クケコ：−37，

サシ：60

[解説]

$$37x+32y=4 \quad \cdots\cdots ①$$

37 と 32 に互除法を用いると

$37=32\cdot1+5$ より　$5=37-32\cdot1$ [B]

$32=5\cdot6+2$ より　$2=32-5\cdot6$

$5=2\cdot2+1$ より　$1=5-2\cdot2$

これより

$$\begin{aligned}1&=5-2\cdot2\\&=5-(32-5\cdot6)\cdot2\\&=5\cdot13+32\cdot(-2)\\&=(37-32\cdot1)\cdot13+32\cdot(-2)\\&=37\cdot13+32\cdot(-15)\end{aligned}$$

よって　$37\cdot13+32\cdot(-15)=1$

この式の両辺を 4 倍して

$$37\cdot52+32\cdot(-60)=4 \quad \cdots\cdots ②$$

① − ②より　$37(x-52)+32(y+60)=0$

ゆえに　$37(x-52)=-32(y+60)$　……③

37 と 32 は互いに素であるから，$x-52$ は 32 の倍数である。

よって，$x-52=32k$（k は整数）と表される。

このとき，③より　$37\cdot32k=-32(y+60)$

ゆえに　$y+60=-37k$

したがって，求める整数解は

$$\boldsymbol{x=32k+52,\ y=-37k-60}\ (k \text{ は整数})$$

[B]　$ax+by=c$ を
$a(x-p)=b(y-q)$
に変形するために，ユークリッドの互除法で a と b の最大公約数を求め，その計算を逆にたどる（a，b は互いに素であるから，最大公約数は 1）。